Journal of Combinatorial Theory, Series A **89**, 270–288 (2000)
doi:10.1006/jcta.1999.3010, available online at http://www.idealibrary.com on IDEAL®

Une identité en théorie des partitions

Michel Lassalle

Centre National de la Recherche Scientifique, École Polytechnique, 91128 Palaiseau, France
E-mail: lassalle@chercheur.com

Communicated by the Managing Editors

Received March 1, 1999

We prove an identity about partitions with a very elementary formulation. We had previously conjectured this identity, encountered in the study of shifted Jack polynomials. The proof given is using a trivariate generating function. We present a conjecture generalizing this identity. © 2000 Academic Press

1. NOTATIONS

Nous revenons dans cet article sur une conjecture que nous avons présentée dans un précédent travail ([5], voir aussi [6]). Il s'agit d'une identité qui se formule de manière extrêmement élémentaire dans le cadre de la théorie classique des partitions.

Une partition λ est une suite décroissante finie d'entiers positifs. On dit que le nombre n d'entiers non nuls est la longueur de λ. On note $\lambda=(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ et $n=l(\lambda)$. On dit que $|\lambda|=\sum_{i=1}^n \lambda_i$ est le poids de λ, et pour tout entier $i\geqslant 1$ que $m_i(\lambda)=card\{j: \lambda_j=i\}$ est la multiplicité de i dans λ. On identifie λ à son diagramme de Ferrers $\{(i, j): 1\leqslant i\leqslant l(\lambda),\ 1\leqslant j\leqslant \lambda_i\}$. On pose

$$z_\lambda=\prod_{i\geqslant 1} i^{m_i(\lambda)} m_i(\lambda)!.$$

Nous avons introduit dans [5] la généralisation suivante du coefficient binomial classique. Soient λ une partition et r un entier $\geqslant 1$. On note $\left\langle {\lambda \atop r} \right\rangle$ le nombre de façons dont on peut choisir r points dans le diagramme de λ de telle sorte que *au moins un point soit choisi sur chaque ligne de* λ.

0097-3165/00 $35.00

Les coefficients binomiaux généralisés $\left\langle{\lambda \atop r}\right\rangle$ possèdent la fonction génératrice suivante

$$\sum_{r \geqslant 1} \left\langle{\lambda \atop r}\right\rangle q^r = \prod_{i=1}^{l(\lambda)} ((1+q)^{\lambda_i} - 1)$$
$$= \prod_{i \geqslant 1} ((1+q)^i - 1)^{m_i(\lambda)}.$$

Soient X une indéterminée et n un entier $\geqslant 1$. On note désormais

$$(X)_n = X(X+1) \cdots (X+n-1)$$
$$[X]_n = X(X-1) \cdots (X-n+1)$$

les factorielles "ascendante" et "descendante" classiques. On pose

$$\binom{X}{n} = \frac{[X]_n}{n!}.$$

Les nombres de Stirling de première espèce $s(n, k)$ sont définis par les fonctions génératrices

$$[X]_n = \sum_{k \geqslant 1} s(n, k)\, X^k$$

$$(X)_n = \sum_{k \geqslant 1} |s(n, k)|\, X^k.$$

2. NOTRE RÉSULTAT

Il s'agit d'une généralisation de la propriété classique suivante, qui est par exemple démontrée au chapitre 1, section 2, exemple 1 du livre de Macdonald [9]. Soit X une indéterminée. Pour tout entier $n \geqslant 1$ on a

$$\sum_{|\mu| = n} (-1)^{n - l(\mu)} \frac{X^{l(\mu)}}{z_\mu} = \binom{X}{n}$$
$$\sum_{|\mu| = n} \frac{X^{l(\mu)}}{z_\mu} = \binom{X+n-1}{n}.$$

Ces deux relations sont équivalentes en changeant X en $-X$.

Dans [5] nous avons formulé la conjecture suivante: pour tous entiers $n, r, s \geqslant 1$ on a

$$\sum_{|\mu|=n} (-1)^{r-l(\mu)} \frac{\left\langle \begin{matrix} \mu \\ r \end{matrix} \right\rangle}{z_\mu} X^{l(\mu)-1} \left(\sum_{i=1}^{l(\mu)} (\mu_i)_s \right)$$
$$= (s-1)! \binom{n+s-1}{n-r} \sum_{i=1}^{\min(r,s)} \binom{X-s}{r-i} \binom{s}{i}.$$

Comme on a $\left\langle \begin{smallmatrix} \mu \\ |\mu| \end{smallmatrix} \right\rangle = 1$, on voit facilement que la propriété classique précédente correspond au cas $r = n$, $s = 1$.

Compte-tenu de la formule classique de Chu–Vandermonde

$$\binom{X+Y}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{X}{n-i} \binom{Y}{i} \tag{1}$$

notre conjecture peut s'exprimer sous la forme plus naturelle suivante.

Théorème 1. *Soit X une indéterminée. Pour tous entiers $n, r, s \geqslant 1$ on a*

$$\sum_{|\mu|=n} (-1)^{r-l(\mu)} \frac{\left\langle \begin{matrix} \mu \\ r \end{matrix} \right\rangle}{z_\mu} X^{l(\mu)-1} \left(\sum_{i=1}^{l(\mu)} (\mu_i)_s \right)$$
$$= (s-1)! \binom{n+s-1}{n-r} \left[\binom{X}{r} - \binom{X-s}{r} \right].$$

Ou de manière équivalente, en changeant X en $-X$,

$$\sum_{|\mu|=n} \frac{\left\langle \begin{matrix} \mu \\ r \end{matrix} \right\rangle}{z_\mu} X^{l(\mu)-1} \left(\sum_{i=1}^{l(\mu)} (\mu_i)_s \right)$$
$$= (s-1)! \binom{n+s-1}{n-r} \left[\binom{X+r+s-1}{r} - \binom{X+r-1}{r} \right].$$

Comme on a

$$\left\langle \begin{matrix} \mu \\ r \end{matrix} \right\rangle = 0 \qquad \text{si} \quad r > |\mu|,$$

l'identité est triviale pour $r > n$. Comme on a

$$\left\langle \begin{matrix} \mu \\ r \end{matrix} \right\rangle = 0 \qquad \text{si} \quad r < l(\mu),$$

la sommation au membre de gauche est limitée aux partitions μ telles que $l(\mu) \leqslant r$. Chacun des membres de l'identité est ainsi un polynôme en X de degré $r-1$.

Le théorème 1 se décompose donc en r identités obtenues en identifiant les coefficients de $X^p (0 \leqslant p \leqslant r-1)$ dans chaque membre. Le coefficient de X^{p-1} est obtenu par sommation sur les partitions de longueur p. De manière équivalente le théorème 1 se formule donc comme suit.

THÉORÈME 2. *Pour tous entiers $n, r, s \geqslant 1$ et pour tout entier $1 \leqslant p \leqslant r$ on a*

$$r! \sum_{\substack{|\mu| = n \\ l(\mu) = p}} \frac{\left\langle \begin{matrix} \mu \\ r \end{matrix} \right\rangle}{z_\mu} \left(\sum_{i=1}^{l(\mu)} \frac{(\mu_i)_s}{s!} \right) = \binom{n+s-1}{n-r} \left(\sum_{j=p}^{r} \binom{j}{p-1} |s(r, j)| \, s^{j-p} \right).$$

Dans le cas particulier $s = 1$, le théorème 1 s'écrit facilement (voir [5], p. 462)

$$\sum_{|\mu| = n} (-1)^{r - l(\mu)} \frac{\left\langle \begin{matrix} \mu \\ r \end{matrix} \right\rangle}{z_\mu} X^{l(\mu)} = \binom{n-1}{r-1} \binom{X}{r}. \tag{2}$$

Le théorème 2 devient alors

$$r! \sum_{\substack{|\mu| = n \\ l(\mu) = p}} \frac{\left\langle \begin{matrix} \mu \\ r \end{matrix} \right\rangle}{z_\mu} = \binom{n-1}{r-1} |s(r, p)|. \tag{3}$$

Rodica Simion a obtenu une preuve purement combinatoire de cette identité [11]. Sa démonstration est donnée dans [5], p. 461.

Dans le cas général $s \neq 1$, Jiang Zeng a également obtenu une démonstration purement combinatoire du Théorème 1 [12].

Les démonstrations de Simion et de Zeng sont des preuves bijectives "à la Schützenberger": on montre que chaque membre de l'identité dénombre un certain ensemble de deux manières différentes.

Cet article n'aurait pas pu être écrit sans les remarques et les conseils d'Alain Lascoux, qui nous a montré comment traduire notre conjecture en termes de fonctions symétriques, ce qui est mis en oeuvre dans les sections 4 et 5. Nous pouvons ainsi donner deux preuves différentes du théorème 2 aux sections 6 et 7.

Alain Lascoux nous a également signalé le lien étroit entre notre identité et la formule de Cauchy, ainsi que sa formulation en termes de λ-anneaux, qui est esquissée à la section 8.

Enfin la section 9 expose brièvement les motivations nous ayant conduit au théorème 1. Il s'agit de l'étude des polynômes "symétriques décalés". Nous formulons en particulier une nouvelle conjecture qui généralise l'identité du théorème 1.

3. DEUX CAS PARTICULIERS

Il est très facile d'expliciter le théorème 2 pour $p=r$ et $p=r-1$. Pour $p=r$ le théorème 2 s'écrit

$$(r-1)! \sum_{\substack{|\mu|=n\\ l(\mu)=r}} \frac{\left\langle \begin{matrix}\mu\\ r\end{matrix}\right\rangle}{z_\mu} \left(\sum_{i=1}^{l(\mu)} (\mu_i)_s\right) = s! \binom{n+s-1}{n-r}.$$

Comme on a

$$\left\langle \begin{matrix}\mu\\ l(\mu)\end{matrix}\right\rangle = \prod_{i=1}^{l(\mu)} \mu_i = \prod_{i\geqslant 1} i^{m_i(\mu)},$$

on obtient le

THÉORÈME 3. *Pour tous entiers $n, r, s \geqslant 1$ on a*

$$(r-1)! \sum_{\substack{|\mu|=n\\ l(\mu)=r}} \frac{\sum_{i\geqslant 1} m_i(\mu)(i)_s}{\prod_{i\geqslant 1} m_i(\mu)!} = s! \binom{n+s-1}{n-r}.$$

Pour $p=r-1$ le théorème 2 s'écrit

$$2(r-2)! \sum_{\substack{|\mu|=n\\ l(\mu)=r-1}} \frac{\left\langle \begin{matrix}\mu\\ r\end{matrix}\right\rangle}{z_\mu} \left(\sum_{i=1}^{l(\mu)} (\mu_i)_s\right) = s! \binom{n+s-1}{n-r} (s+r-1)$$

car on a $s(r, r-1) = -\binom{r}{2}$. On vérifie facilement la relation

$$\left\langle \begin{matrix} \mu \\ l(\mu)+1 \end{matrix} \right\rangle = \frac{1}{2}\,(|\mu| - l(\mu)) \prod_{i=1}^{l(\mu)} \mu_i.$$

L'identité précédente s'écrit donc

$$(r-2)! \sum_{\substack{|\mu| = n \\ l(\mu) = r-1}} \frac{\sum_{i \geqslant 1} m_i(\mu)(i)_s}{\prod_{i \geqslant 1} m_i(\mu)!} = s! \binom{n+s-1}{n-r} \frac{s+r-1}{n-r+1}$$

c'est-à-dire la relation du théorème 3, écrite en remplaçant r par $r-1$.

Enfin comme on a

$$\left\langle \begin{matrix} \mu \\ |\mu| \end{matrix} \right\rangle = 1$$

le théorème 1 prend la forme suivante pour $r = n$.

THÉORÈME 4. *Soit X une indéterminée. Pour tous entiers $n, s \geqslant 1$ on a*

$$\sum_{|\mu| = n} (-1)^{n - l(\mu)} \frac{X^{l(\mu)-1}}{z_\mu} \left(\sum_{i=1}^{l(\mu)} (\mu_i)_s \right) = (s-1)! \left[\binom{X}{n} - \binom{X-s}{n} \right].$$

Ou de manière équivalente

$$\sum_{|\mu| = n} \frac{X^{l(\mu)-1}}{z_\mu} \left(\sum_{i=1}^{l(\mu)} (\mu_i)_s \right) = (s-1)! \left[\binom{X+n+s-1}{n} - \binom{X+n-1}{n} \right].$$

Pour $s = 1$ on retrouve la propriété classique énoncée au commencement de la section 2.

4. LE CAS PARTICULIER $r = n$

On considère les fonctions symétriques complètes $h_i(x)$ d'un ensemble de variables x ([9], chapitre 1, section 2). Rappelons que $h_i(x)$ est le coefficient de t^i dans le développement en série entière de $\prod_j (1 - x_j t)^{-1}$. Pour deux ensembles de variables z, u on a donc immédiatement

$$h_n(z, u) = \sum_{i=0}^{n} h_{n-i}(z)\, h_i(u). \tag{4}$$

On note (1^k) le point $x_1 = \cdots = x_k = 1$, $x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = 0$. Alors on a ([9], exercice 1.1.2)

$$h_i(1^k) = \binom{i+k-1}{i}. \tag{5}$$

On note $h_i(1^X)$ le polynôme obtenu par la continuation analytique du second membre. C'est le coefficient de t^i dans le développement en série entière de $(1-t)^{-X}$.

A titre d'explicitation de la méthode suivie, nous démontrons maintenant le théorème 4. La seconde identité peut s'écrire

$$\sum_{|\mu|=n} \frac{X^{l(\mu)-1}}{z_\mu} \left(\sum_{i=1}^{l(\mu)} h_{\mu_i-1}(1^{s+1}) \right) = \frac{1}{s} \left(h_n(1^{X+s}) - h_n(1^X) \right).$$

En appliquant (4) et la relation élémentaire

$$\frac{h_i(1^k)}{k} = \frac{h_{i-1}(1^{k+1})}{i}$$

le membre de droite devient

$$\frac{1}{s} \left(h_n(1^{X+s}) - h_n(1^X) \right) = \sum_{i=1}^{n} h_{n-i}(1^X) \frac{h_i(1^s)}{s} = \sum_{i=1}^{n} h_{n-i}(1^X) \frac{h_{i-1}(1^{s+1})}{i}.$$

Le théorème 4 se formule donc comme suit

$$\sum_{|\mu|=n} \frac{X^{l(\mu)-1}}{z_\mu} \left(\sum_{i \geqslant 1} m_i(\mu)\, h_{i-1}(1^{s+1}) \right) = \sum_{i=1}^{n} h_{n-i}(1^X) \frac{h_{i-1}(1^{s+1})}{i}.$$

Cette relation est le cas particulier pour $z = 1^{s+1}$ de l'identité *plus générale* suivante, écrite pour un ensemble *quelconque* de variables z,

$$\sum_{|\mu|=n} \frac{X^{l(\mu)-1}}{z_\mu} \left(\sum_{i \geqslant 1} m_i(\mu)\, h_{i-1}(z) \right) = \sum_{i=1}^{n} h_{n-i}(1^X) \frac{h_{i-1}(z)}{i}.$$

Maintenant, et c'est le point *essentiel*, on peut observer que cette nouvelle identité est *linéaire* en les fonctions $h_i(z)$. Il suffit donc de la démontrer lorsque z est réduit à *une seule variable*. On a alors $h_i(z) = z^i$.

L'identité précédente est ainsi *équivalente* à celle dont nous donnons maintenant la démonstration.

THÉORÈME 5. *Soient X et z deux indéterminées. Pour tout entier $n \geqslant 1$ on a*

$$\sum_{|\mu|=n} \frac{X^{l(\mu)-1}}{z_\mu} \left(\sum_{i \geqslant 1} m_i(\mu)\, z^{i-1} \right) = \sum_{i=1}^{n} h_{n-i}(1^X)\, \frac{z^{i-1}}{i}.$$

Preuve. On forme la fonction génératrice

$$\sum_{\mu} X^{l(\mu)} y^{|\mu|} \frac{\sum_{i \geqslant 1} m_i(\mu)\, z^{i-1}}{\prod_{i \geqslant 1} i^{m_i(\mu)} m_i(\mu)!}.$$

On peut l'écrire comme la dérivée, prise au point $u=1$ de

$$\sum_{m_i} \frac{1}{\prod_i i^{m_i} m_i!} X^{\sum_i m_i}\, y^{\sum_i i m_i} u^{\sum_i m_i z^{i-1}}.$$

La fonction génératrice est donc égale à

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \sum_{m_i} \prod_i \frac{1}{m_i!} \left(X \frac{y^i}{i} u^{z^{i-1}} \right)^{m_i} \Bigg|_{u=1} &= \frac{d}{du} \prod_i \exp\left(X \frac{y^i}{i} u^{z^{i-1}} \right) \Bigg|_{u=1} \\ &= \left(X \sum_{i \geqslant 1} z^{i-1} \frac{y^i}{i} \right) \exp\left(X \sum_{i \geqslant 1} \frac{y^i}{i} \right) \\ &= \left(X \sum_{i \geqslant 1} z^{i-1} \frac{y^i}{i} \right) \frac{1}{(1-y)^X}. \end{aligned}$$

On voit ainsi que le terme y^n apparait dans chacune des contributions suivantes pour tout $i \geqslant 1$,

$$\frac{X}{z} \frac{(zy)^i}{i} \times \text{coefficient de } y^{n-i} \text{ dans } (1-y)^{-X}.$$

Par la définition même des fonctions h_i, le coefficient de y^n est donc

$$X \sum_{i \geqslant 1} \frac{z^{i-1}}{i} h_{n-i}(1^X). \quad \blacksquare$$

5. LA MÉTHODE GÉNÉRALE

Nous revenons maintenant à la formulation générale du théorème 1, avec r arbitraire. Nous aurons besoin du résultat auxiliaire suivant.

LEMME. *Pour tous entiers a, b, c, d on a*

$$\binom{a+b-1}{d-c}\binom{b+c-1}{c-1}=\sum_{i=c}^{d}\binom{i-1}{c-1}\binom{a-i-1}{a-d-1}\binom{b+i-1}{i-1}.$$

Preuve. L'expression se réduit immédiatement à

$$\binom{a+b-1}{d-c}=\sum_{i=c}^{d}\binom{a-i-1}{a-d-1}\binom{b+i-1}{b+c-1}.$$

Ce qui peut s'écrire en posant $k=d-c$,

$$\binom{a+b-1}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{a-c-i-1}{k-i}\binom{b+c+i-1}{i}.$$

On termine en appliquant (1). ▮

Compte-tenu de (1) on peut écrire

$$\binom{X-s}{r}-\binom{X}{r}=\sum_{j=1}^{r}\binom{X}{r-j}\binom{-s}{j}.$$

Mais on a

$$\frac{1}{s}\binom{-s}{j}=\frac{(-1)^j}{s}\binom{s+j-1}{j}=\frac{(-1)^j}{j}\binom{s+j-1}{j-1}.$$

Compte-tenu de (5) l'identité du théorème 1 peut donc se formuler comme suit

$$\sum_{|\mu|=n}(-1)^{r-l(\mu)}\frac{\left\langle{\mu \atop r}\right\rangle}{z_\mu}X^{l(\mu)-1}\left(\sum_{i=1}^{l(\mu)}h_{\mu_i-1}(1^{s+1})\right)$$
$$=\sum_{j=1}^{r}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\binom{X}{r-j}\binom{n+s-1}{n-r}\binom{s+j-1}{j-1}.$$

Maintenant, en appliquant le Lemme pour n, s, j, $n-r+j$, on a

$$\binom{n+s-1}{n-r}\binom{s+j-1}{j-1}=\sum_{i=j}^{n-r+j}\binom{i-1}{j-1}\binom{n-i-1}{r-j-1}\binom{s+i-1}{i-1}.$$

Le théorème 1 peut donc s'écrire

$$\sum_{|\mu|=n} (-1)^{r-l(\mu)} \frac{\left\langle \begin{matrix} \mu \\ r \end{matrix} \right\rangle}{z_\mu} X^{l(\mu)-1} \left(\sum_{i \geqslant 1} m_i(\mu)\, h_{i-1}(1^{s+1}) \right)$$
$$= \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=j}^{n-r+j} (-1)^{j-1} \binom{X}{r-j} \frac{1}{i} \binom{i}{j} \binom{n-i-1}{r-j-1} h_{i-1}(1^{s+1}).$$

Comme précédemment cette identité est le cas particulier pour $z = 1^{s+1}$ de l'identité plus générale suivante, écrite pour un ensemble *quelconque* de variables z.

THÉORÈME 6. *Soient X une indéterminée et z un ensemble quelconque de variables. Pour tous entiers $n, r \geqslant 1$ on a*

$$\sum_{|\mu|=n} (-1)^{r-l(\mu)} \frac{\left\langle \begin{matrix} \mu \\ r \end{matrix} \right\rangle}{z_\mu} X^{l(\mu)-1} \left(\sum_{i \geqslant 1} m_i(\mu)\, h_{i-1}(z) \right)$$
$$= \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=j}^{n-r+j} (-1)^{j-1} \binom{X}{r-j} \frac{1}{i} \binom{i}{j} \binom{n-i-1}{r-j-1} h_{i-1}(z).$$

Comme précédemment cette nouvelle identité est linéaire en les fonctions $h_i(z)$. Il suffit donc de la démontrer lorsque z est réduit à *une seule variable*. On a alors $h_i(z) = z^i$.

Le théorème 6 est ainsi *équivalent* à celui que nous formulons maintenant.

THÉORÈME 7. *Soient X et z deux indéterminées. Pour tous entiers $n, r \geqslant 1$ on a*

$$\sum_{|\mu|=n} (-1)^{r-l(\mu)} \frac{\left\langle \begin{matrix} \mu \\ r \end{matrix} \right\rangle}{z_\mu} X^{l(\mu)-1} \left(\sum_{i \geqslant 1} m_i(\mu)\, z^{i-1} \right)$$
$$= \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=j}^{n-r+j} (-1)^{j-1} \binom{X}{r-j} \frac{1}{i} \binom{i}{j} \binom{n-i-1}{r-j-1} z^{i-1}.$$

On peut formuler ce résultat de manière équivalente en identifiant dans chaque membre les coefficients de X^{p-1}, avec $1 \leqslant p \leqslant r$.

Théorème 8. *Pour tous entiers $n, r \geqslant 1$, pour tout entier $1 \leqslant p \leqslant r$ et pour toute indéterminée z on a*

$$\sum_{\substack{|\mu|=n \\ l(\mu)=p}} \frac{\left\langle \begin{matrix} \mu \\ r \end{matrix} \right\rangle}{z_\mu} \left(\sum_{i \geqslant 1} m_i(\mu)\, z^{i-1} \right) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=j}^{n-r+j} \frac{|s(r-j, p-1)|}{i(r-j)!} \binom{i}{j} \binom{n-i-1}{r-j-1} z^{i-1}.$$

Cet énoncé est ainsi une généralisation du théorème 2, et c'est lui que nous allons maintenant démontrer.

6. PREMIÈRE DÉMONSTRATION

Nous aurons besoin du résultat auxiliaire suivant, déjà utilisé par Di Bucchianico et Loeb [1].

Théorème 9. *Soient x, y, q trois indéterminées. On a*

$$\left(\frac{1-y}{1-y(1+q)} \right)^x = \sum_{i, j, k \geqslant 0} \binom{i-1}{j-1} \frac{|s(j, k)|}{j!}\, x^k y^i q^j$$

Preuve. Nous appliquons la formule du binôme

$$\sum_{i \geqslant j} \binom{i-1}{j-1} y^{i-j} = \frac{1}{(1-y)^j}.$$

Le membre de droite s'écrit donc comme suit

$$\sum_{i, j} \binom{i-1}{j-1} \binom{-x}{j} y^i (-q)^j = \sum_j \binom{-x}{j} \left(\frac{qy}{y-1} \right)^j$$

L'énoncé résulte alors de la formule du binôme

$$(1+t)^{-x} = \sum_{j \geqslant 0} \binom{-x}{j} t^j. \quad \blacksquare$$

Démonstration du théorème 8. Nous formons la fonction génératrice

$$\sum_{\mu, r} q^r x^{l(\mu)} y^{|\mu|} \frac{\left\langle \begin{matrix} \mu \\ r \end{matrix} \right\rangle}{\prod_{i \geqslant 1} i^{m_i(\mu)} m_i(\mu)!} \sum_{i \geqslant 1} m_i(\mu)\, z^{i-1}.$$

On peut l'écrire comme la dérivée, prise au point $u=1$ de

$$\sum_{m_i} u^{\sum_i m_i z^{i-1}} x^{\sum_i m_i} y^{\sum_i i m_i} \prod_i \frac{((1+q)^i-1)^{m_i}}{i^{m_i} m_i!}$$
$$=\sum_{m_i} \prod_i \frac{1}{m_i!} \left(x y^i u^{z^{i-1}} \frac{(1+q)^i-1}{i} \right)^{m_i}.$$

La fonction génératrice est donc égale à

$$\frac{d}{du} \prod_i \exp\left(x y^i \frac{(1+q)^i-1}{i} u^{z^{i-1}} \right) \Bigg|_{u=1}$$
$$= x \left(\sum_{i \geqslant 1} z^{i-1} y^i \frac{(1+q)^i-1}{i} \right) \exp\left(x \sum_{i \geqslant 1} y^i \frac{(1+q)^i-1}{i} \right).$$

Mais le dernier terme peut s'écrire

$$\exp\left(x \sum_{i \geqslant 1} y^i \frac{(1+q)^i-1}{i} \right) = \exp\left(x \sum_{i \geqslant 1} \left(\frac{(y(1+q))^i}{i} - \frac{y^i}{i} \right) \right)$$
$$= \exp(x[-\log(1-y(1+q)) + \log(1-y)])$$
$$= \left(\frac{1-y}{1-y(1+q)} \right)^x.$$

La fonction génératrice s'écrit donc

$$\frac{x}{z} \left(\sum_{i \geqslant 1} \frac{(yz)^i}{i} \left(\sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} q^j \right) \right) \left(\frac{1-y}{1-y(1+q)} \right)^x$$

Le théorème 9 permet d'expliciter le terme en $q^r x^p y^n$ de cette fonction. On voit que le terme $q^r x^p y^n$ apparait dans chacune des contributions suivantes pour tout $i \geqslant 1$ et pour tout $1 \leqslant j \leqslant i$,

$$\frac{x}{z} \frac{(yz)^i}{i} \binom{i}{j} q^j \binom{n-i-1}{r-j-1} \frac{|s(r-j, p-1)|}{(r-j)!} x^{p-1} y^{n-i} q^{r-j}.$$

Le coefficient de $q^r x^p y^n$ est donc

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} \frac{|s(r-j, p-1)|}{i\,(r-j)!} \binom{n-i-1}{r-j-1} z^{i-1}.$$

Ce qui achève la preuve du théorème 8. ∎

7. SECONDE DÉMONSTRATION

Cette seconde démonstration est due à Theresia Eisenkölbl [3], qui a trouvé une preuve très rapide du théorème 8. Fixons $i \geqslant 1$ et identifions le coefficient de z^{i-1} dans chaque membre. Nous obtenons

$$\sum_{\substack{|\mu|=n\\ l(\mu)=p}} \frac{\left\langle \begin{matrix}\mu\\ r\end{matrix}\right\rangle}{z_\mu}\, m_i(\mu) = \sum_{j=1}^{i} \frac{|s(r-j,\, p-1)|}{i\,(r-j)!} \binom{i}{j}\binom{n-i-1}{r-j-1}.$$

La sommation au membre de gauche est réduite aux partitions μ telles que $m_i(\mu) \neq 0$, c'est-à-dire de la forme $\mu = \lambda \cup \{i\}$. On a alors $m_i(\mu) = m_i(\lambda)+1$, $l(\mu) = l(\lambda)+1$, $z_\mu = i m_i(\mu)\, z_\lambda$ et

$$\left\langle \begin{matrix}\mu\\ r\end{matrix}\right\rangle = \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} \left\langle \begin{matrix}\lambda\\ r-j\end{matrix}\right\rangle.$$

La relation du théorème 8 s'écrit donc

$$\sum_{\substack{|\lambda|=n-i\\ l(\lambda)=p-1}} \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} \frac{\left\langle \begin{matrix}\lambda\\ r-j\end{matrix}\right\rangle}{z_\lambda} = \sum_{j=1}^{i} \frac{|s(r-j,\, p-1)|}{(r-j)!} \binom{i}{j}\binom{n-i-1}{r-j-1}.$$

Mais c'est exactement la relation (3)

$$(r-j)! \sum_{\substack{|\lambda|=n-i\\ l(\lambda)=p-1}} \frac{\left\langle \begin{matrix}\lambda\\ r-j\end{matrix}\right\rangle}{z_\lambda} = \binom{n-i-1}{r-j-1} |s(r-j,\, p-1)|$$

multipliée par $\binom{i}{j}$ et sommée sur $j \geqslant 1$. ∎

Theresia Eisenkölbl a donné dans [2] une démonstration différente du théorème 1.

8. FONCTIONS SYMÉTRIQUES ET λ-ANNEAUX

Dans cette section nous allons considérer les fonctions symétriques comme étant des opérateurs sur l'anneau des polynômes d'un nombre quelconque d'indéterminées $(v_1, v_2, ..., v_n, y, t, ...)$. Voir par exemple [9], remarque 1.2.15, et [10].

Soit Λ l'anneau des fonctions symétriques, dont les sommes de puissances ψ^i, $i \geqslant 1$ forment un système de générateurs algébriques. On définit une action de Λ sur tout polynôme en posant

$$\psi^i\left[\sum_\alpha c_\alpha u_\alpha\right] = \sum_\alpha c_\alpha u_\alpha^i,$$

avec c_α constante réelle et u_α un monôme en $(v_1, v_2, ..., v_n, y, t, ...)$.

Cette action s'étend naturellement à tout élément de Λ. Pour toute partition μ et tout polynôme P on pose

$$\psi^\mu[P] = \prod_{i=1}^{l(\mu)} \psi^i[P] = \prod_{i \geqslant 1} \psi^i[P]^{m_i(\mu)}.$$

On a immédiatement $\psi^\mu[PQ] = \psi^\mu[P]\, \psi^\mu[Q]$.

Si on note σ^n la fonction symétrique complète d'ordre n, on a pour tout polynôme P, la "formule de Cauchy"

$$\sum_{n \geqslant 0} \sigma^n[P] = \sum_\mu \frac{\psi^\mu[P]}{z_\mu},$$

ou encore

$$\sigma^n[P] = \sum_{|\mu| = n} \frac{\psi^\mu[P]}{z_\mu}.$$

Nous avons précédemment rencontré cette formule générale sous la forme des deux "spécialisations" suivantes.

(a) Soient une *constante* x et une *indéterminée* t. La formule de Cauchy se formule comme suit

$$\sum_{n \geqslant 0} \sigma^n[xt] = \sum_{m_i} \prod_i \frac{(xt^i)^{m_i}}{i^{m_i} m_i!} = \sum_{m_i} \prod_i \frac{1}{m_i!}\left(\frac{xt^i}{i}\right)^{m_i} = (1-t)^{-x}.$$

En d'autres termes, pour toute constante x on a

$$\sigma^n[x] = h_n(1^x) = \binom{x+n-1}{n}.$$

(b) Soient une *constante* x et deux *indéterminées* y et Q. On pose $q = Q - 1$ et $P = xyq$. On a $\psi^i[xyq] = x\, y^i \psi^i[q]$ et $\psi^i[q] = \psi^i[Q-1] = Q^i - 1$. La formule de Cauchy se formule comme suit

$$\sum_{n\geqslant 0}\sigma^n[xyq]=\sum_{m_i}x^{\Sigma_i m_i}y^{\Sigma_i im_i}\prod_i\frac{((1+q)^i-1)^{m_i}}{i^{m_i}m_i!}$$
$$=\sum_{m_i}\prod_i\frac{1}{m_i!}\left(xy^i\frac{(1+q)^i-1}{i}\right)^{m_i}.$$

Ce qui revient à dire que $\sigma^n[xq]$ est le coefficient de y^n dans

$$\exp\left(x\sum_{i\geqslant 1}y^i\frac{(1+q)^i-1}{i}\right)=\left(\frac{1-y}{1-y(1+q)}\right)^x.$$

On retrouve ainsi la fonction apparue au théorème 9.

De manière analogue, soient z et u deux indéterminées. On considère la formule de Cauchy

$$\sum_{n\geqslant 0}\sigma^n[xyuq]=\sum_{m_i}x^{\Sigma_i m_i}y^{\Sigma_i im_i}\prod_i\psi^i[u]^{m_i}\frac{((1+q)^i-1)^{m_i}}{i^{m_i}m_i!}$$
$$=\sum_{m_i}\prod_i\frac{1}{m_i!}\left(xy^i\frac{(1+q)^i-1}{i}\psi^i[u]\right)^{m_i}.$$

La fonction génératrice utilisée à la section 6 n'est autre que l'image du second membre par l'opérateur $\sum_i z^{i-1}\psi^{i-1}[u]\, d/d\psi^i[u]$, spécialisée en $u=1$. Elle s'écrit

$$x\left(\sum_{i\geqslant 1}z^{i-1}\frac{\psi^i[yq]}{i}\right)\sum_{n\geqslant 0}\sigma^n[xyq].$$

9. MOTIVATIONS ET PERSPECTIVES

Soient α un nombre réel positif et $(x_1, x_2, ..., x_N)$ une famille d'indéterminées indépendantes. On dit qu'un polynôme est "symétrique décalé" s'il est symétrique en les variables "décalées" x_i-i/α. Les "polynômes de Jack décalés" [8] forment une base de l'algèbre ainsi définie.

Chaque polynôme symétrique décalé f est entièrement déterminé par ses valeurs $f(\lambda)$ pour les partitions λ. Dans [5, 7, 8] nous avons introduit la famille suivante de polynômes symétriques décalés, définie en la spécifiant sur les partitions. Pour toute partition λ et tout entier $k\geqslant 0$, on note

$$d_k(\lambda)=\sum_{(i,\,j)\in\lambda}\left(j-1-\frac{i-1}{\alpha}\right)^k.$$

Pour tous entiers j, k on pose

$$F_{jk}(\lambda) = \sum_{|\mu| = j} \frac{\left\langle {\mu \atop k} \right\rangle}{z_\mu} \prod_{i \geqslant 1} d_i(\lambda)^{m_i(\mu)}.$$

On définit ainsi des polynômes symétriques décalés qui interviennent pour expliciter les "polynômes de Jack décalés" (voir [8], p. 152–158). Dans [5] nous avons formulé à leur sujet plusieurs conjectures combinatoires. Il apparait que ces conjectures sont en fait *indépendantes* des quantités $d_k(\lambda)$ et demeurent vraies si $d_k(\lambda)$ est remplacé par une indéterminée quelconque X_k.

Nous considérons donc désormais une famille (infinie) d'indéterminées indépendantes $X = (X_1, X_2, X_3, ...)$. Pour tous entiers $j, k \geqslant 0$ nous posons

$$P_{jk}(X) = \sum_{|\mu| = j} \frac{\left\langle {\mu \atop k} \right\rangle}{z_\mu} \prod_{i \geqslant 1} X_i^{m_i(\mu)}.$$

Comme on a $\langle {\mu \atop k} \rangle = 0$ si $k < l(\mu)$, la sommation est limitée aux partitions μ telles que $l(\mu) \leqslant k$. Il en résulte que $P_{jk}(X)$ est un polynôme de degré k. Comme on a $\langle {\mu \atop k} \rangle = 0$ si $k > |\mu|$, on a $P_{jk}(X) = 0$ pour tout $k > j$. On pose par convention $P_{00}(X) = 1$.

On a par exemple facilement

$$P_{j1}(X) = X_j,$$

$$P_{j2}(X) = \tfrac{1}{2}(j-1)\, X_j + \tfrac{1}{2} \sum_{\substack{j_1 + j_2 = j \\ j_1, j_2 \geqslant 1}} X_{j_1} X_{j_2}.$$

Parmi les conjectures que nous avons formulées dans [5], la conjecture centrale est la suivante (conjecture 4). Elle explicite un développement en série formelle.

Conjecture 1. Soient X_0, u et $X = (X_1, X_2, X_3, ...)$ des indéterminées indépendantes. Pour tout entier $n \geqslant 1$ on a

$$\sum_{|\mu| = n} \frac{(-1)^{n - l(\mu)}}{z_\mu} \prod_{i \geqslant 1} \left(X_0 + \sum_{p \geqslant 1} u^p \frac{(i)_p}{p!} X_p \right)^{m_i(\mu)}$$
$$= \sum_{j \geqslant 0} u^j \left(\sum_{k=0}^{min(n,\, j)} \binom{X_0 - j}{n - k} P_{jk}(X) \right).$$

Au membre de gauche il est évident que chaque terme correspondant à la partition μ est un polynôme homogène de degré $l(\mu)$. On a en particulier

$$\prod_{i\geqslant 1}\left(X_0+\sum_{p\geqslant 1}u^p\frac{(i)_p}{p!}X_p\right)^{m_i(\mu)}$$
$$={X_0}^{l(\mu)}+X_0^{l(\mu)-1}\sum_{s\geqslant 1}u^sX_s\left(\sum_{i\geqslant 1}m_i(\mu)\frac{(i)_s}{s!}\right)+\text{autres termes}....$$

Au membre de droite de la conjecture 1, le terme sans X_s correspond au choix $j=k=0$. On en déduit l'égalité

$$\sum_{|\mu|=n}\frac{(-1)^{n-l(\mu)}}{z_\mu}X_0^{l(\mu)}=\binom{X_0}{n}.$$

On retrouve ainsi la relation classique citée au début de la section 2.

Au membre de droite de la conjecture 1, le terme en X_s ne peut être obtenu que pour $j=s$, et en restreignant la sommation dans P_{sk} à la partition-ligne (s). On a alors

$$P_{sk}(X)=\frac{\binom{s}{k}}{s}X_s+\text{autres termes}....$$

On en déduit l'égalité

$$\sum_{|\mu|=n}\frac{(-1)^{n-l(\mu)}}{z_\mu}X_0^{l(\mu)-1}\left(\sum_{i\geqslant 1}m_i(\mu)\frac{(i)_s}{s!}\right)=\sum_{k=1}^{min(n,\,s)}\binom{X_0-s}{n-k}\frac{\binom{s}{k}}{s}.$$

On retrouve ainsi l'identité démontrée au théorème 4.

Ces remarques nous conduisent à généraliser la conjecture 1 sous la forme suivante. Cette nouvelle conjecture est triviale pour $r>n$ et on retrouve la conjecture 1 pour $r=n$.

Conjecture 2. Soient X_0, u et $X=(X_1, X_2, X_3, ...)$ des indéterminées indépendantes. Pour tous entiers $n, r\geqslant 1$ on a

$$\sum_{|\mu|=n}(-1)^{r-l(\mu)}\frac{\left\langle{\mu \atop r}\right\rangle}{z_\mu}\prod_{i\geqslant 1}\left(X_0+\sum_{p\geqslant 1}u^p\frac{(i)_p}{p!}X_p\right)^{m_i(\mu)}$$
$$=\sum_{j\geqslant 0}u^j\binom{n+j-1}{n-r}\left(\sum_{k=0}^{min(r,\,j)}\binom{X_0-j}{r-k}P_{jk}(X)\right).$$

Comme précédemment, l'égalité des termes sans X_s s'écrit

$$\sum_{|\mu|=n} (-1)^{r-l(\mu)} \frac{\left\langle \begin{matrix} \mu \\ r \end{matrix} \right\rangle}{z_\mu} X_0^{l(\mu)} = \binom{n-1}{n-r} \binom{X_0}{r}.$$

On retrouve ainsi la relation (2). L'égalité des termes en X_s s'écrit

$$\sum_{|\mu|=n} (-1)^{r-l(\mu)} \frac{\left\langle \begin{matrix} \mu \\ r \end{matrix} \right\rangle}{z_\mu} X_0^{l(\mu)-1} \left(\sum_{i \geqslant 1} m_i(\mu) \frac{(i)_s}{s!} \right)$$
$$= \binom{n+s-1}{n-r} \sum_{k=1}^{min(r,\, s)} \binom{X_0-s}{r-k} \frac{\binom{s}{k}}{s}.$$

On retrouve ainsi l'identité du théorème 1.

La conjecture 2 est triviale pour $r=1$. La sommation au membre de gauche est alors restreinte à la partition $\mu=(n)$, et la conjecture s'écrit

$$X_0 + \sum_{p \geqslant 1} u^p \frac{(n)_p}{p!} X_p = \sum_{j \geqslant 0} u^j \binom{n+j-1}{n-1} \sum_{k=0,\,1} \binom{X_0-j}{1-k} P_{jk}(X)$$
$$= X_0 + \sum_{j \geqslant 1} u^j \binom{n+j-1}{n-1} X_j.$$

Le lecteur pourra également vérifier la conjecture 2 pour $r=2$. La sommation au membre de gauche est alors restreinte aux partitions de longueur $\leqslant 2$, et la conjecture s'écrit

$$-\frac{n-1}{2} \left(X_0 + \sum_{p \geqslant 1} u^p \frac{(n)_p}{p!} X_p \right)$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \left(X_0 + \sum_{p \geqslant 1} u^p \frac{(i)_p}{p!} X_p \right) \left(X_0 + \sum_{p \geqslant 1} u^p \frac{(n-i)_p}{p!} X_p \right)$$
$$= (n-1) \binom{X_0}{2} + \sum_{j \geqslant 1} u^j \binom{n+j-1}{n-2} ((X_0-j)\, X_j + P_{j2}(X)).$$

Alain Lascoux a tout récemment obtenu une élégante démonstration de la conjecture 1 en utilisant les méthodes de la théorie des λ-anneaux esquissées à la section 8. Il est vraisemblable que la conjecture 2 pourra être démontrée de la même manière [4].

RÉFÉRENCES

1. A. Di Bucchianico et D. E. Loeb, A proof of Lassalle′s harmonic number conjecture, *Abstracts Amer. Math. Soc.* **97** (1994), 538.
2. T. Eisenkölbl, Proof of a partition identity conjectured by Lassalle, http://xxx.lanl.gov/math.CO/9903019.
3. T. Eisenkölbl, private communication.
4. A. Lascoux et M. Lassalle, en préparation.
6. M. Lassalle, Une conjecture en théorie des partitions, http://xxx.lanl. gov/math.CO/9901040.
7. M. Lassalle, Some combinatorial conjectures for Jack polynomials, *Ann. Combin.* **2** (1998), 61–83.
8. M. Lassalle, Some combinatorial conjectures for shifted Jack polynomials, *Ann. Combin.* **2** (1998), 145–163.
9. I. G. Macdonald, "Symmetric Functions and Hall Polynomials," 2nd ed., Clarendon Press, Oxford, 1995.
10. V. Prosper, "Combinatoire des polynômes multivariés," Thèse, Université Paris 7, 1999, ftp://schubert.univ-mlv.fr/pub/thesis/Vincent.Prosper/vpthesis.html.
11. R. Simion, private communication.
12. J. Zheng, A bijective proof of Lasalle's partition identity, *J. Combin. Theory Ser. A* **89** (2000), doi:10.1006/jcta.1999.3016.